不完全Gamma関数の漸近公式
Asymptotic Formula of the Incomplete Gamma Function

中嶋眞澄
Masumi Nakajima
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概要

Abstract

We give here an asymptotic formula of the incomplete gamma function by ordinary method of steepest descent or saddle point method.

Key words ; Incomplete gamma function, the method of steepest descent, saddle point method
Mathematics Subject Classification 2010; 33B20.

$\Gamma(w)$ は Euler の gamma 関数である。$\gamma(a,z)$, $\Gamma(a,z)$, $P(a,z)$, $Q(a,z)$ を次で定義する。$\gamma(a,z)$, $\Gamma(a,z)$ を不完全gamma関数である。$a>0$, $z>0$ に対して

$$\gamma(a,z) := \int_0^z t^{a-1}e^{-t}dt, \quad P(a,z) := \frac{\gamma(a,z)}{\Gamma(a)}$$
$$\Gamma(a,z) := \int_z^\infty t^{a-1}e^{-t}dt, \quad Q(a,z) := \frac{\Gamma(a,z)}{\Gamma(a)}.$$

すると次の積分表示が得られる [3]。

$$Q(a,z) = -\frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{a\phi(t)}\frac{dt}{t-\lambda}, \quad 0<c<\lambda$$

$$P(a,z) = 1 + \frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+\infty} e^{a\phi(t)}\frac{dt}{t-\lambda},\quad 0 < c < \lambda \cdots (1)$$

$$where\ \ \phi(t) := t - 1 - \log t,\ \ \lambda := \frac{z}{a}$$

ここで，この積分の最急降下路 path of steepest descent

$$L := \{t := \rho e^{i\theta} \in \mathbf{C} \mid \rho := \frac{\theta}{\sin\theta},\ -\pi < \theta < \pi\}$$

又この積分の鞍点 saddle point は只一つで $t = 1$ である。
Temme [3] は，この最急降下路を使って，初めて $P(a,z)$, $Q(a,z)$ の次の漸近展開を得た: $a > 0$, $z > 0$ に対して

$$Q(a,z) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(\eta\sqrt{\frac{a}{2}}) + R_a(\eta),$$

$$P(a,z) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(-\eta\sqrt{\frac{a}{2}}) - R_a(\eta),$$

$$\eta := (\lambda - 1)\sqrt{2\frac{\lambda - 1 - \log\lambda}{(\lambda-1)^2}},\quad \lambda := \frac{z}{a},$$

$$R_a(\eta) := \frac{e^{-\frac{1}{2}a\eta^2}}{\sqrt{2\pi a}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(\eta)}{a^n},\quad a \to \infty,$$

$$\mathrm{erfc}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} e^{-t^2}dt.$$

ここで

$$\eta = \begin{cases} +\sqrt{2(\lambda - 1 - \log\lambda)}, & (1 < \lambda) \\ 0, & (\lambda = 1) \\ -\sqrt{2(\lambda - 1 - \log\lambda)}, & (0 < \lambda < 1) \end{cases}$$

である。
これらの特別な場合として，$\lambda = 1$ として

$$\begin{aligned} P(a,a) &= \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(0) - R_a(0) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(0)}{a^n},\quad a \to \infty \cdots\cdots (2) \end{aligned}$$

を得る。
Temme [3] の方法とは異なり，素直に最急降下法 method of steepest descent 或いは鞍点法 saddle point method [2] を用いれば，又 (1) を用いれば次を得る:

定理 1　$a \to \infty$ のとき，

$$P(a,\lambda a) = \begin{cases} \frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{2\pi i}\int_L e^{a\phi(t)}\frac{dt}{t-\lambda} = \frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{\sqrt{2\pi a}}\left[\frac{1}{1-\lambda}+\mathrm{O}(\frac{1}{a})\right], & (0<\lambda<1) \\ \frac{1}{2}+\mathrm{O}(\frac{1}{\sqrt{a}}), & (\lambda=1) \\ 1+\frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{2\pi i}\int_L e^{a\phi(t)}\frac{dt}{t-\lambda} = 1-\frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{\sqrt{2\pi a}}\left[\frac{1}{\lambda-1}+\mathrm{O}(\frac{1}{a})\right], & (1<\lambda) \end{cases}$$

注この結果は Riemann の zeta 関数に応用される [1]。
証明

補題 1　[2]　$\varphi(z)$，$f(z)$ ($z = x+iy \in \mathbf{C}$) は，考えている領域で解析的 *analytic* で $f'(z_0)$，$f''(z_0) \neq 0$ なる鞍点 *saddle point* z_0 は考えている領域で只一つで，次の二つの条件を満たすとする。
(i) 2 つの正数 $\delta, l > 0$ が存在して

$$\Re f(z_0) - \Re f(z) \geq l > 0 \ \mathit{for\ all}\ z \in C',\ \mathit{and}\ |z-z_0| > \delta > 0,\ \delta \leq \rho,$$

$$\left|f(z)-f(z_0)-\frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0)^2\right| < \frac{|f''(z_0)|}{4}|z-z_0|^2\ \mathit{for}\ |^\forall z - z_0| \leq \delta.$$

但し，$\rho > 0$ は $f(z)$，$\varphi(z)$ の $z = z_0$ を中心とした 2 つの収束円の収束半径のうち小さい方。C' は鞍点 z_0 を通り，積分路 C を *homotopic* に適当に変形した径路。(最急降下路 C' : $\Im f(z) = \Im f(z_0)$。C は有限径路でも無限径路でも構わない。)
(ii) 2 つの正数 $\lambda_0 > 0$，$M > 0$ が存在して

$$\int_C |\varphi(z)| e^{\lambda_0 \Re f(z)} dz < M.$$

以上の条件を満足すると，次が成立する：

$$\int_C \varphi(z) e^{\lambda f(z)} dz = e^{\lambda f(z_0)} \sqrt{\frac{-2\pi}{\lambda f''(z_0)}}\left[\varphi(z_0) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] \quad as\ \lambda \to +\infty.$$

先の (1) より

$$P(a,\lambda a) = 1 + \frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+\infty} e^{a\phi(t)}\frac{dt}{t-\lambda}, \quad 0<c<\lambda$$
$$\mathit{where}\quad \phi(t) := t - 1 - \log t$$

ここで $t=0$ は分岐点 branch point，$t=\lambda$ は 1 位の極 simple pole，$t=1$ は鞍点 sdaddle point であることに注意する。
この積分路：$(c-i\infty, c+i\infty)$ を最急降下路 path of steepest descent: L

に移動するが λ の値により次の3つに場合分けされる。

(i)$0 < \lambda < 1$ の場合

この場合，積分路：$(c - i\infty, c + i\infty)$ から最急降下路：

$$L := \{t := \rho e^{i\theta} \in \mathrm{C} \mid \rho := \frac{\theta}{\sin\theta},\ -\pi < \theta < \pi\}$$

に移る際，1位の極：$t = \lambda$ を通過するので留数residueを考慮して

$$P(a, \lambda a) = \frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{2\pi i}\int_L e^{a\phi(t)}\frac{dt}{t - \lambda},$$
$$where\ \ \phi(t) := t - 1 - \log t$$

となる。

この積分の被積分関数と積分径路 L は補題1の前提条件を容易に満たすので

$$P(a, \lambda a) = \frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{2\pi i}\int_L e^{a\phi(t)}\frac{dt}{t - \lambda}$$
$$= \frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{\sqrt{2\pi a}}\left[\frac{1}{1 - \lambda} + \mathrm{O}(\frac{1}{a})\right],\ (0 < \lambda < 1)$$
$$where\ \ \phi(t) := t - 1 - \log t$$

を得る。

(ii)$1 < \lambda$ の場合

この場合，積分路：$(c - i\infty, c + i\infty)$ から最急降下路：

$$L := \{t := \rho e^{i\theta} \in \mathrm{C} \mid \rho := \frac{\theta}{\sin\theta},\ -\pi < \theta < \pi\}$$

に移る際，何の特異点もないので

$$\begin{aligned} P(a, \lambda a) &= 1 + \frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+\infty} e^{a\phi(t)}\frac{dt}{t - \lambda},\ \ 0 < c < \lambda \\ &\qquad where\ \ \phi(t) := t - 1 - \log t \\ &= 1 + \frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{2\pi i}\int_L e^{a\phi(t)}\frac{dt}{t - \lambda} \end{aligned}$$

となり，同じく補題1を使って

$$P(a, \lambda a) = 1 + \frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{2\pi i}\int_L e^{a\phi(t)}\frac{dt}{t - \lambda}$$
$$= 1 + \frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{\sqrt{2\pi a}}\left[\frac{1}{1 - \lambda} + \mathrm{O}(\frac{1}{a})\right]$$
$$= 1 - \frac{e^{-a\phi(\lambda)}}{\sqrt{2\pi a}}\left[\frac{1}{\lambda - 1} + \mathrm{O}(\frac{1}{a})\right],\ (1 < \lambda)$$
$$where\ \ \phi(t) := t - 1 - \log t$$

を得る。

(iii)$\lambda = 1$ の場合

積分路:L 上に 1 位の極 simple pole:$t = 1$ があるので，一般化された留数定理 generalized residue theorem から，この場合，留数 residue は $\frac{1}{2}$ となるが，補題 1 の条件は満足しない。

そこで Temme [3] の結果で $\lambda = 1$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
P(a,a) &= \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(0) - R_a(0) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(0)}{a^n}, \quad a \to \infty \cdots\cdots (2) \\
&= \frac{1}{2} + \mathrm{O}(\frac{1}{\sqrt{a}}), \ (\lambda = 1)
\end{aligned}
$$

を得る。これで定理は完全に証明された。□

参考文献

[1] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (III) A Mean Value Integral(III), 鹿児島経済論集, 第 60 巻 1 号, 2019 年 7 月, 61-76, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, July 2019, 61-76.

[2] Sveshnikov,A. G.,Tikhonov: *Function Theory of One Complex Variable* (Russian), Nauka, Moskow, 1967.

[3] Temme,N.M.: *Special Functions*, John Wiley & Sons, New York, 1996, § 11.2.3, § 11.2.4.

[4] Temme,N.M.: Numerical aspects of special functions, *Acta Numerica* (2008), 1-101, Cambridge Univ. Press. or *Acta Numerica* **16** (2007), 379-478.

[5] Amparo,G., Segura,J., Temme,N.M.: *Methods for Special Functions*, SIAM, 2007.

(received 10 March 2019.)

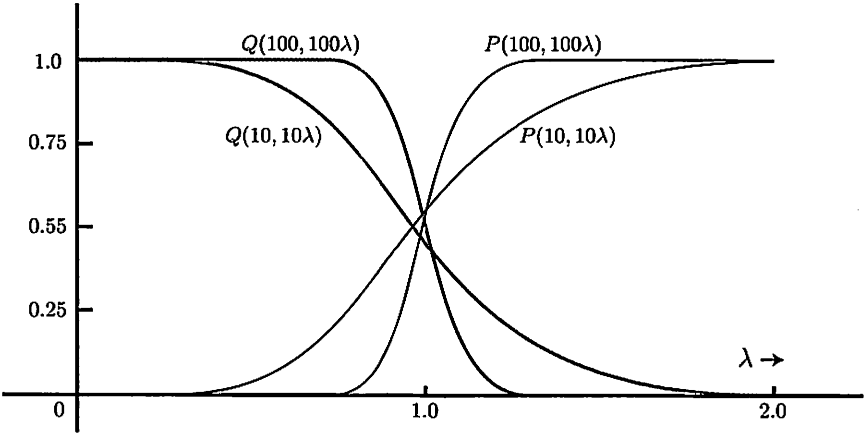
$Q(100, 100\lambda)$
$P(100, 100\lambda)$
$Q(10, 10\lambda)$
$P(10, 10\lambda)$
1.0
0.75
0.55
0.25
0
$\lambda \rightarrow$
1.0
2.0

Fig. 1 from [4],[5]